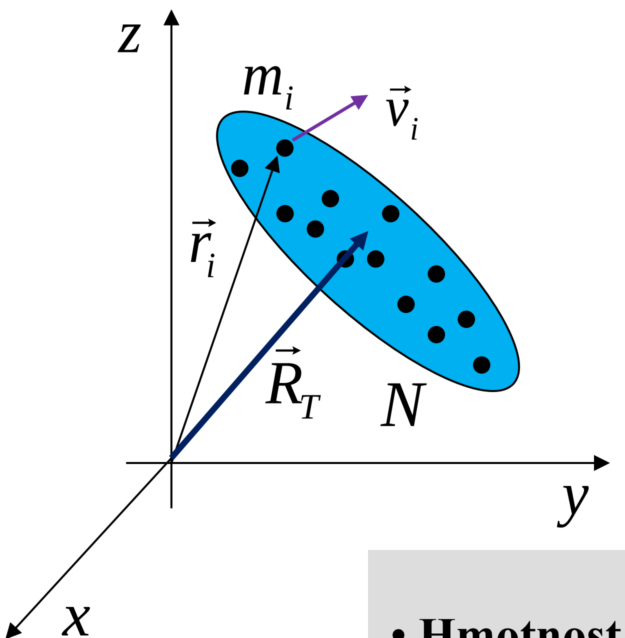
Opakování - Soustava hmotných bodů

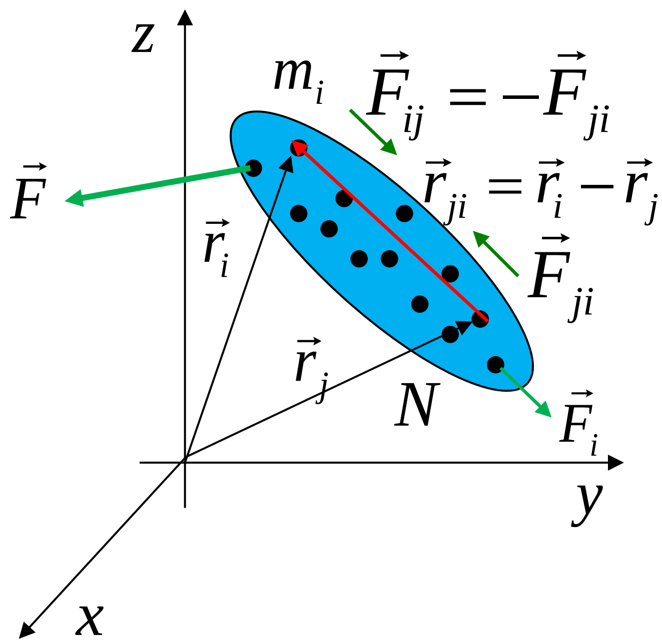


- Soustava N částic,
  např. molekuly plynu v uzavřené nádobě
- Poloha i-tého bodu: $\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$
- Rychlost, hybnost i-tého bodu: $\vec{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$
- Zrychlení i-tého bodu: $\vec{a}_i = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$

- **Hmotnost soustavy hmotných bodů:** $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- **Hmotný střed (těžiště):** $\vec{R}_T \equiv \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$

$$X_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad Z_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Síla působící na i-tý hmotný bod : $\vec{F}_i$
- Sílu která nám působí na i-tý hmotný bod si můžeme představit složenou ze dvou výslednic:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \vec{F}_i^{\,I}$$

výslednice **vnějších sil** působících na *i*-tý bod

vnitřní síly, kterými působí všechny hmotné body soustavy na *i*-tý bod

- Pro výslednici vnitřních sil platí: $\vec{F}_i^{\,I} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,I}, \quad \vec{F}_{ii}^{\,I} = 0$
- Podle 3. Newtonova zákona platí: $\vec{F}_{ij}^{\,I} = -\vec{F}_{ji}^{\,I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,i} = 0$
- Podle 2. Newtonova zákona je **výsledná síla** působící na soustavu:

$$\vec{F} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i^{\,E} + \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,I} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice

- Uvážíme-li:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

- **1. věta impulzová** pro **výslednou sílu:**

„Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná výslednici vnějších sil působících na soustavu a má s ní stejný směr.“

$$\vec{F} = \sum_{i} \vec{F}_i^{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{R}_T}{\mathrm{d}t^2}$$

- Pro konečný časový interval (t_1, t_2) dostaneme integrací:

$$\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice

• V případě **izolované soustavy hmotných bodů** je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i^{\,E} = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_T = konst.}$$

• **Zákon zachování hybnosti:**
„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

• Působí-li na i-tý hmotný bod síla $\vec{F}_i$ pak moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadné je:

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

• Pro celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{\,I} + \vec{F}_i^{\,E}\right)\right] = \vec{M}^{I} + \vec{M}^{E}$$

• Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,E}\right]}$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice

- Pro i-tý hmotný bod tedy platí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right] = M_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

- Pro celou soustavu poščítáme přes všechny hmotné body:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} \vec{b}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{M}$$

- **2. věta impulzová:**

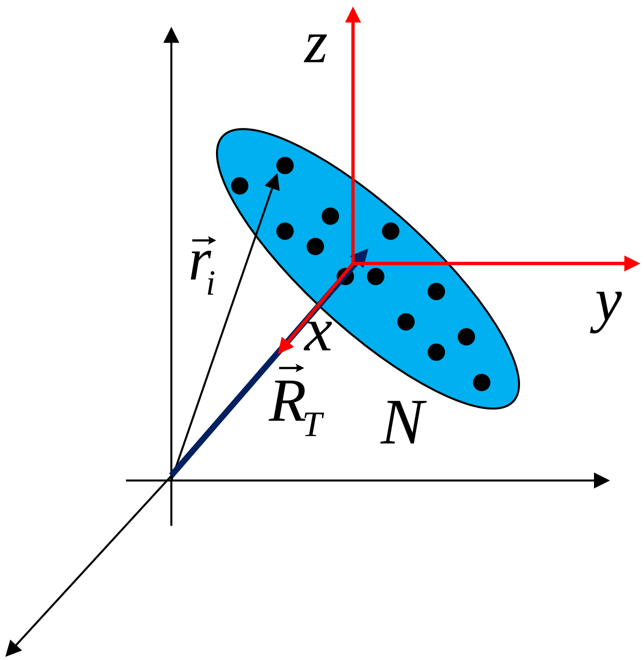
„Součet momentů vnějších sil působících na jednotlivé hmotné body soustavy je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.“

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

- Pro konečný časový interval (t_1, t_2) dostaneme integrací:

$$\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_{t_1}^{t_1} \vec{M}\,\mathrm{d}t$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Nemění-li se hmotnosti jednotlivých hmotných bodů s časem, potom **rychlost hmotného středu soustavy**:

$$\vec{v}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\vec{v}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

- Pro **celkovou hybnost soustavy hmotných bodů**:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = M\vec{v}_T$$

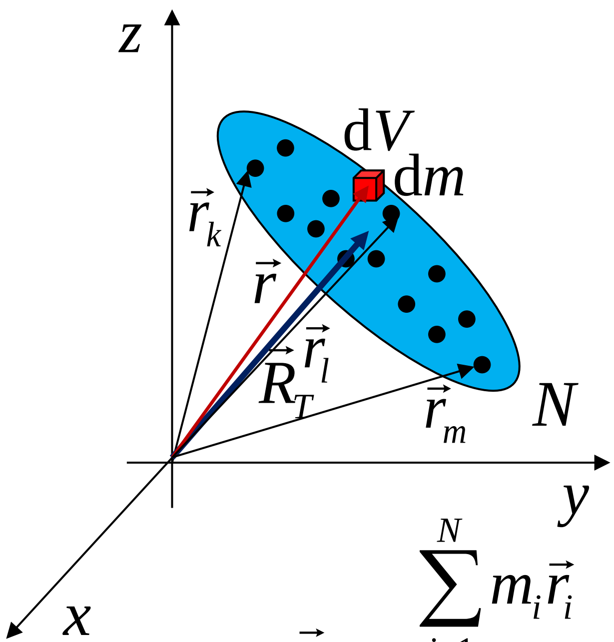
- Když za počátek soustavy souřadné zvolíme hmotný střed (těžiště) soustavy:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_T = 0$$

- dá se ukázat, že 2. věta impulzová platí i pokud vztahujeme moment hybnosti a moment síly vůči hmotnému středu soustavy:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{B}_s}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_s}$$

Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- **Volná soustava hmotných bodů**. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné 3*N* souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má **3*N* stupňů volnosti.**
- **Tuhá soustava hmotných bodů**. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

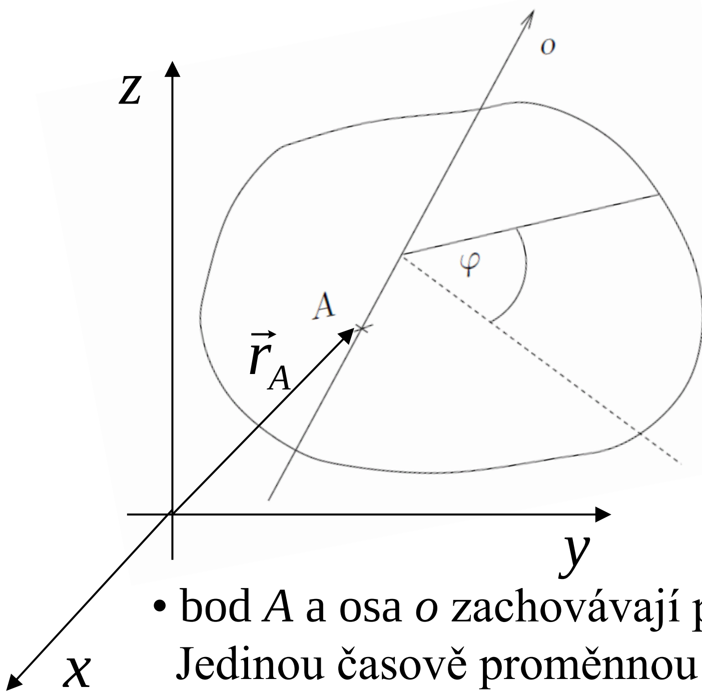
$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = konst., \quad \rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{m}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

$$\vec{R}_T \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \equiv \frac{\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V}{\int_V \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V, \quad kde \quad \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}m = M$$

- Udáním poloh tří hmotných bodů v tuhé soustavě, které neleží na jedné přímce je jednoznačně určena poloha všech bodů soustavy. Tři polohové vektory mají devět souřadnic, ale musí splňovat tyto tři rovnice:

$$d_{kl} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_l\right|, \quad d_{km} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_m\right|, \quad d_{lm} = \left|\vec{r}_l - \vec{r}_m\right| \quad \Rightarrow \quad 6\; stup.volnosti$$

Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- Místo stanovení tří pevných bodů v tělese, můžeme určit polohu tělesa stanovením polohy jednoho bodu např. *A*, osy procházející tímto bodem a otočením tělesa kolem této osy.
- Poloha bodu *A* je určena třemi souřadnicemi, směr osy je určen jednotkovým vektorem, tedy dvěma údaji a otočení kolem osy jedním:

$$\vec{r}_A = (x, y, z), \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), kde\ |\vec{n}| = 1, \quad \varphi$$

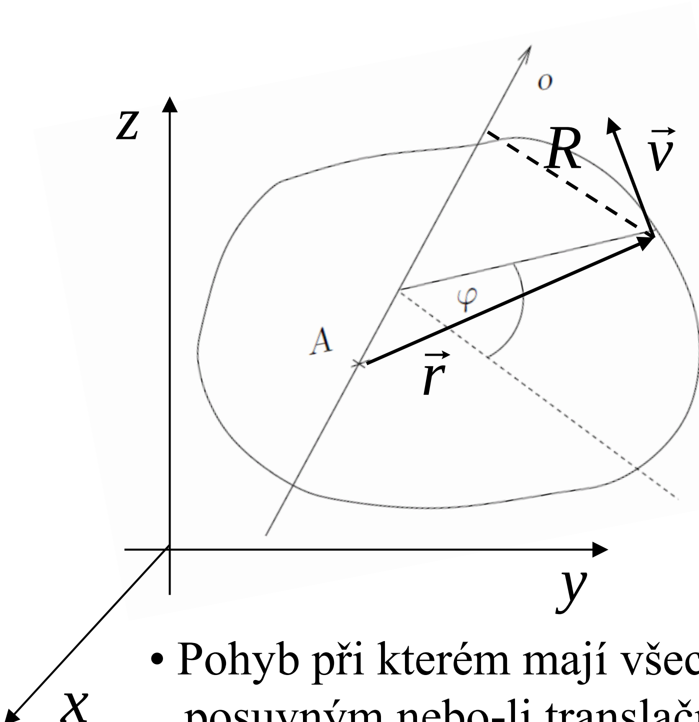
- bod *A* a osa *o* zachovávají po celou dobu pohybu v tělese i prostoru stálou polohu. Jedinou časově proměnnou veličinou je úhel otočení a udáním jeho časové závislosti je pohyb určen :

$$\varphi = \varphi(t)$$

- Uvedený pohyb se nazývá **rotací tuhého tělesa kolem pevné osy**. Otáčí-li se těleso kolem pevné osy mají všechny body tělesa v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost a stejné úhlové zrychlení:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- Obecnějším pohybem tuhého tělesa je pohyb, při kterém pouze jeden jeho bod *A* zachovává v tělese i prostoru stálou polohu. Tento pohyb nazýváme **rotací tuhého tělesa kolem pevného bodu**.
- Zavedeme vektor úhlové rychlosti, jehož směr je shodný s osou otáčení, která se může měnit s časem, pak podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa dána vzorcem :

$$\vec{v} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

- Pohyb při kterém mají všechny body tuhého tělesa stejný vektor rychlosti nazýváme posuvným nebo-li translačním pohybem: $\vec{v}_T = \vec{v}_T(t)$

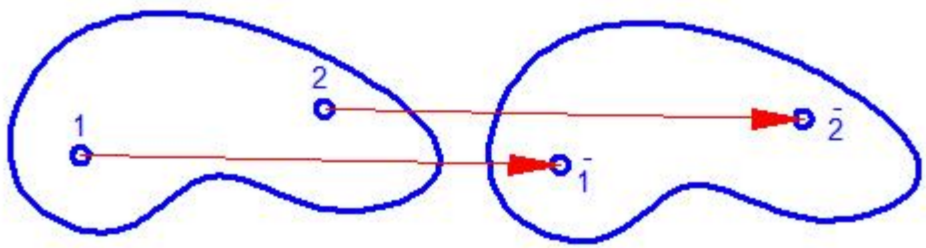
Chaslesova věta (teorém): Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu. Rychlost libovolného bodu tuhého tělesa lze určit složením rychlosti jednoho libovolného bodu *A* tělesa a rychlosti dané otáčením kolem tohoto bodu:

$$v(t) = \vec{v}_T(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Otáčení a posunutí

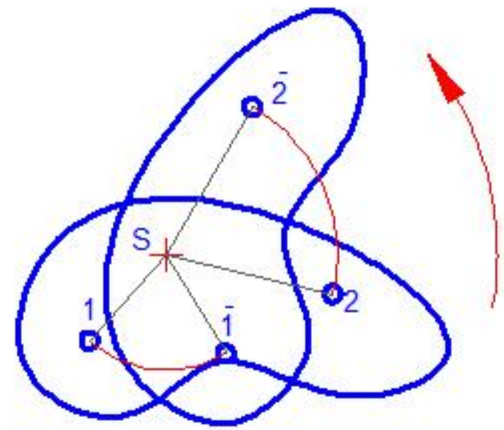
posunutí (translace)

• všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích



otočení (rotace)

• všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



Pohyb tuhého tělesa

• Chaslesova věta (teorém)

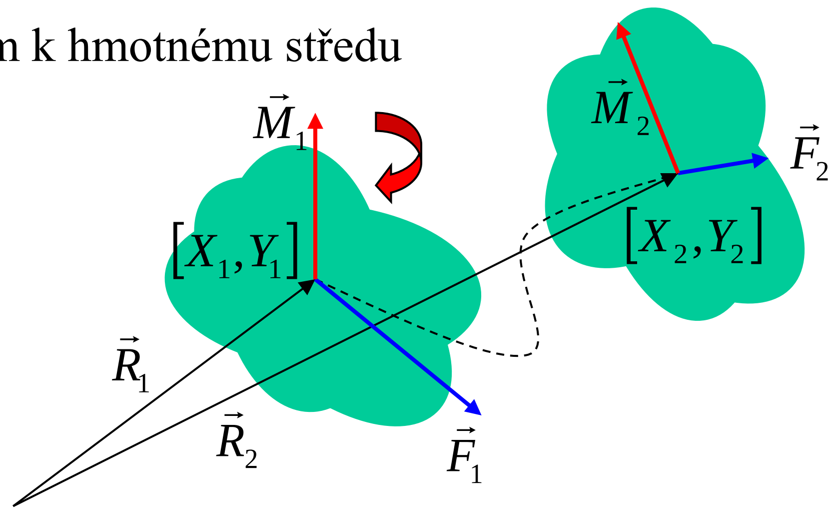
Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu

• hmotný střed se pohybuje jako hmotný bod v němž se soustředěna celá hmotnost tělesa a na který působí výslednice všech vnějších sil

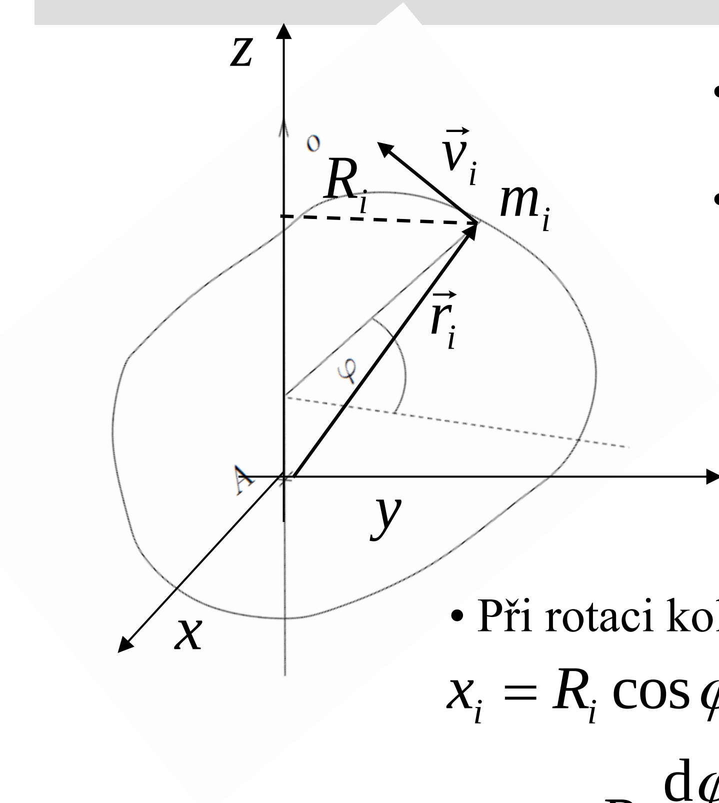
$$\vec{F}^{\,E} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_T = M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{(1. impulsová věta)}$$

• časová změna momentu hybnosti soustavy vzhledem k hmotnému středu je rovna výslednému momentu vnějších sil

$$\vec{M}^{\,E} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \quad \text{(2. impulsová věta)}$$



Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Zvolíme soustavu souřadnou tak, že osa *z* bude totožná s osou otáčení *o*.
- Pohybovou rovnici získáme úpravou třetí složky 2. věty impulzové:

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$B_z = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right]_z = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i m_i v_{iy} - y_i m_i v_{ix}\right)$$

- Při rotaci kolem pevné osy se i-tý hmotný bod pohybuje po kružnici a tedy:

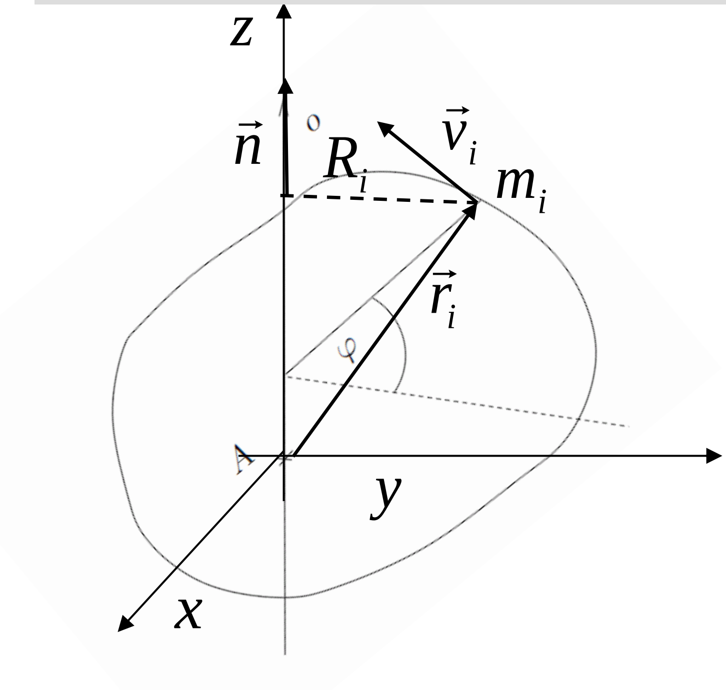
$$x_i = R_i \cos\varphi_i \qquad y_i = R_i \sin\varphi_i$$

$$v_{ix} = -R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \sin\varphi_i \qquad v_{iy} = R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \cos\varphi_i$$

- U tuhé soustavy hmotných bodů jsou úhlové rychlosti všech bodů stejné:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad B_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \omega J$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Jelikož jsou pro tuhou soustavu hmotných bodů vzdálenosti hmotných bodů od osy otáčení konstantní, můžeme definovat **moment setrvačnosti**:

$$J \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \int_M R^2 \mathrm{d}m \equiv \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V \equiv \iiint_V R^2 \rho \mathrm{d}V$$

- z-ovou složku pohybové rovnice můžeme tedy psát ve tvaru:

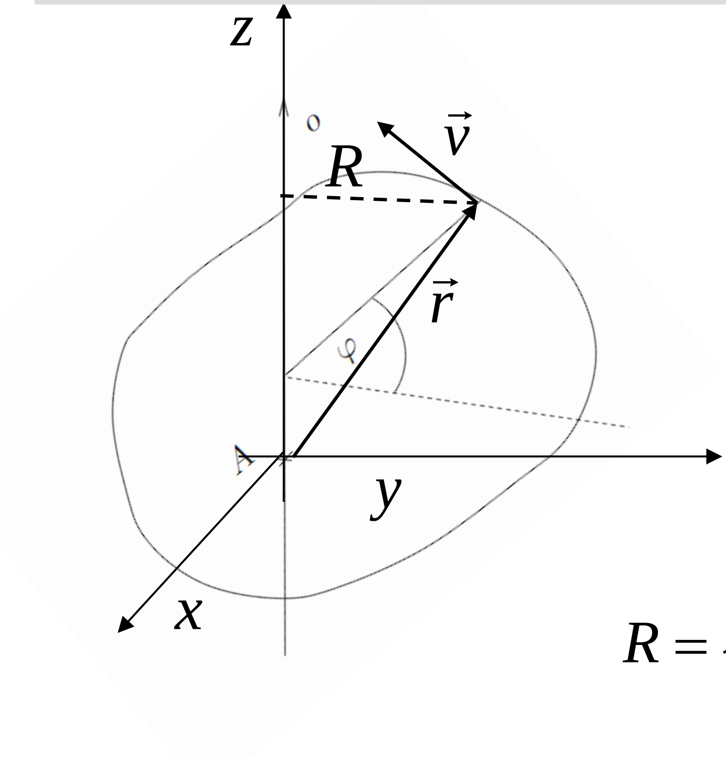
$$\frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_z = M_0$$

- Kde složku výsledného momentu vnějších sil do směru osy otáčení nazýváme **výsledným momentem vnějších sil vůči ose otáčení,** kde obecně:

$$M_0 = \vec{n} \cdot \vec{M} = n_x M_x + n_y M_y + n_z M_z$$

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E)$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Jelikož jsou pro tuhou soustavu hmotných bodů vzdálenosti hmotných bodů od osy otáčení konstantní, můžeme definovat **moment setrvačnosti**:

$$J \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \int_M R^2 \mathrm{d}m \equiv \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V \equiv \iiint_V R^2 \rho \mathrm{d}V$$

- Zvolíme li osu z shodnou s osou otáčení tuhého tělesa:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow J = \int_V \left(x^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\rho \mathrm{d}V$$

- Moment setrvačnosti lze také vyjádřit jako součin hmotnosti tělesa a čtverce jisté střední vzdálenosti R, v níž by musela být soustředěna hmotnost tělesa M, byl roven momentu setrvačnosti tělesa. Vzdálenost R se nazývá **poloměr setrvačnosti (gyrační poloměr) tělesa** pro danou osu:

$$J = MR_g^2 \Rightarrow R_g = \sqrt{\frac{J}{M}}$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – kinetická energie

- Vrátíme se ke **Königově větě -** celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie hmotného středu a vnitřní kinetické energie soustavy.

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{iT}^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + E_K^I$$

- Jestliže soustava (těleso) koná pouze posuvný pohyb. V tomto případě je rychlost všech bodů a tedy i těžiště stejná a kinetická energie:

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_T^2$$

- Jestliže se soustava (těleso) otáčí kolem pevné osy okamžitou úhlovou rychlostí ω potom pro kinetickou energii soustavy dostaneme:

$$v_i = R_i \omega \quad \Rightarrow \quad E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

- Soustava (těleso) koná obecný pohyb, který lze v každém okamžiku nahradit posuvným pohybem a rotací kolem osy procházející těžištěm:

$$E_K = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$$

Analogie otáčení a posuvu

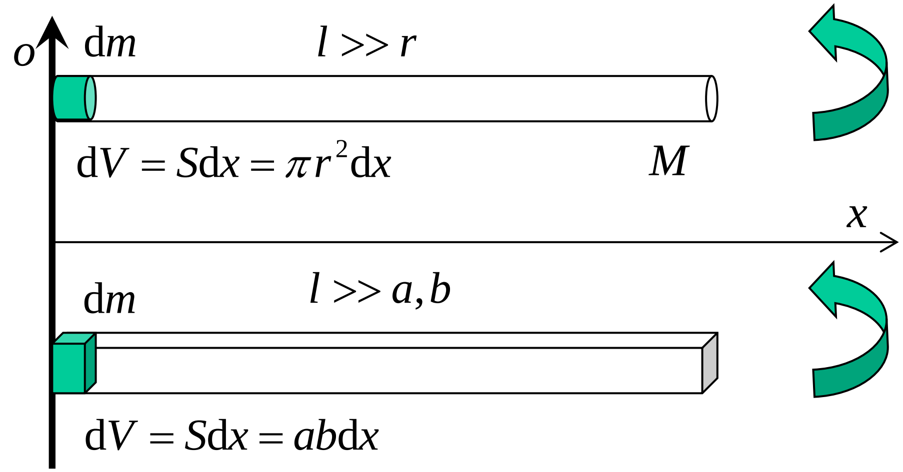
posunutí		**otočení**	
• vzdálenost x o kolik se těleso posunulo		• úhel φ o kolik se těleso otočilo	
• rychlost $v = dx / dt$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	• úhlová rychlost $\omega = d\varphi / dt$	$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$
• zrychlení $a = d^2x / dt^2$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	• úhlové zrychlení $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
• síla F	$\vec{F}$	• moment síly $M_z = x F_y - y F_x$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
• hybnost p	$\vec{p}$	• moment hybnosti $B_z = x p_y - y p_x$	$\vec{B} = \vec{r} \times \vec{p}$
• 2. Newtonův zákon	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	• 2. Newtonův zákon	$\vec{M} = \frac{d\vec{B}}{dt}$
• hmotnost	m	• moment setrvačnosti	$J = \sum_i m_i R_i^2 = \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V$
• kinetická energie	$E_K = \frac{1}{2} m v^2$	• kinetická energie	$E_K = \frac{1}{2} J \omega^2$
• 1. Impulsová věta	$\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt}$	• 2. Impulsová věta	$\vec{M}^E = \frac{d\vec{B}}{dt}$

Moment setrvačnosti - tyče

- moment setrvačnosti homogenní tyče délky l
- pro osu otáčení na kraji:

$$J = \int_M x^2 dm = \int_V \rho x^2 dV \Rightarrow J = \rho S \int_0^l x^2 dx$$

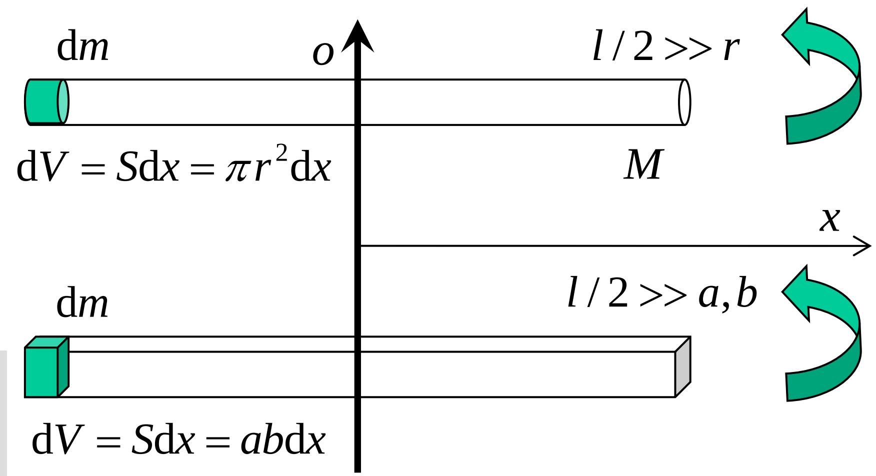
$$J = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \rho S \left[\frac{l^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{3} M l^2$$



- moment setrvačnosti homogenní tyče délky l
- pro osu otáčení uprostřed tyče:

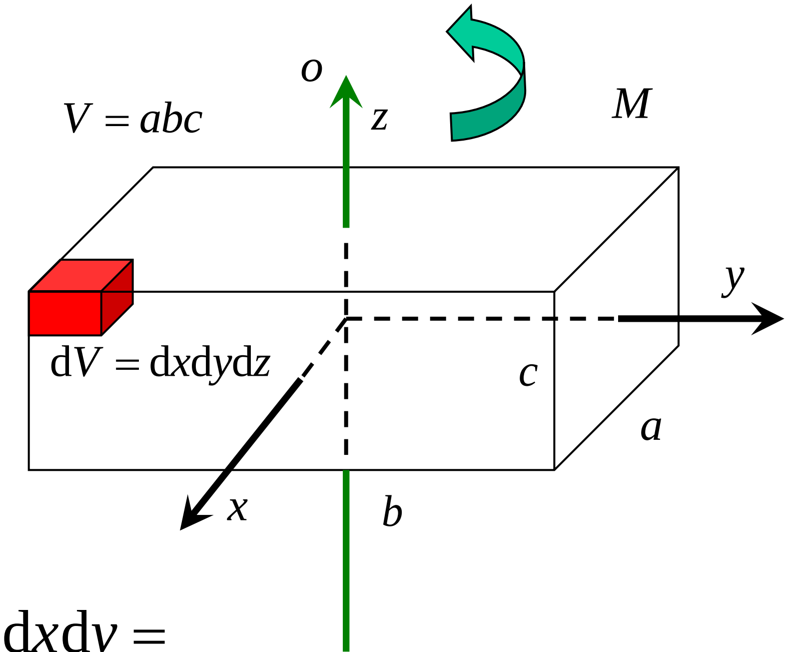
$$J = \int_V \rho x^2 dV \Rightarrow J = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

$$J = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho S \left[\frac{(\frac{l}{2})^3}{3} + \frac{(\frac{l}{2})^3}{3} \right] = \frac{1}{12} M l^2$$



Moment setrvačnosti - kvádru

- moment setrvačnosti homogenního kvádru
- pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy z:



$$J_z = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) dV =$$

$$= \rho \int_V x^2 dV + \rho \int_V y^2 dV$$

$$\rho \int_V x^2 dV = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = c\rho \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= cb\rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \mathrm{d}x = cb\rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = cb\rho \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \rho V \frac{a^2}{12}$$

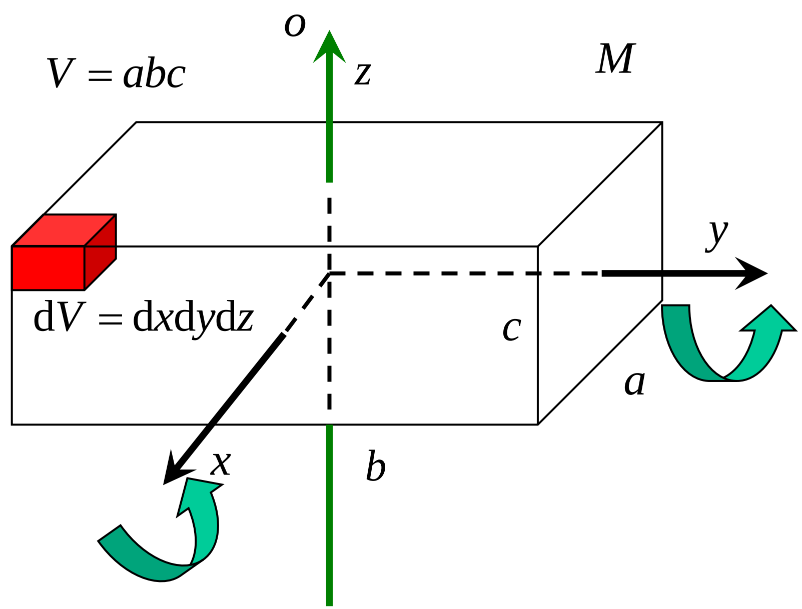
$$\rho \int_V y^2 dV = \rho V \frac{b^2}{12}$$

$$J_z = \rho V \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Moment setrvačnosti - kvádru

- moment setrvačnosti homogenního kvádru

- pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy y:



$$J_y = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + z^2\right) dV =$$

$$= \rho \int_V x^2 dV + \rho \int_V z^2 dV$$

$$\rho \int_V x^2 dV = \rho V \frac{a^2}{12} \qquad \rho \int_V z^2 dV = \rho V \frac{c^2}{12}$$

$$J_y = \rho V \frac{a^2 + c^2}{12} = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

$$J_x = \rho V \frac{b^2 + c^2}{12} = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

Opakování - obloukový element křivky 3D

kartézská soustava: $$\mathrm{d}s=\left((\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{dz})^2\right)^{1/2}$$

cylidrická soustava: $$\mathrm{d}s=\left((\mathrm{d}\rho)^2+(\rho\,\mathrm{d}\varphi)^2+(\mathrm{dz})^2\right)^{1/2}$$

sférická soustava: $$\mathrm{d}s=\left((\mathrm{d}r)^2+(r\,\mathrm{d}\vartheta)^2+(r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\right)^{1/2}$$

$\mathrm{d}s_i=h_i\mathrm{d}q_i$ $$\mathrm{d}s=\left((\mathrm{d}s_1)^2+(\mathrm{d}s_2)^2+(\mathrm{d}s_3)^2\right)^{1/2}=\left((h_1\mathrm{d}q_1)^2+(h_2\mathrm{d}q_2)^2+(h_3\mathrm{d}q_3)^2\right)^{1/2}$$

h_i – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r\sin\vartheta$	r	ϑ	φ

Objemový element: $$\mathrm{d}V=\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3=h_1\mathrm{d}q_1h_2\mathrm{d}q_2h_3\mathrm{d}q_3$$

Sférická soustava souřadnic - objemový element**:** $$\mathrm{d}V=r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

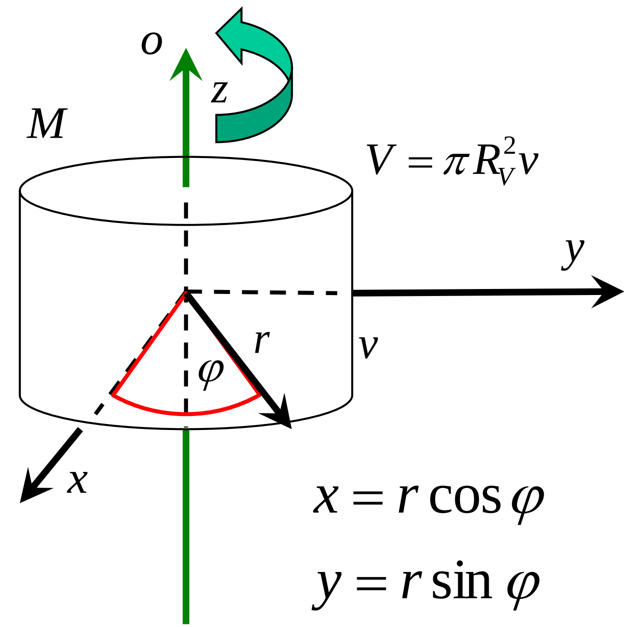
Cylidrická soustava souřadnic - objemový element: $$\mathrm{d}V=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{dz}$$

Kartézká soustava souřadnic - objemový element: $$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Moment setrvačnosti - válce

• moment setrvačnosti homogenního válce

• pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy z:



$$J_z = \int_M R^2 dm = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

$$J_z = \rho \int_{-v/2}^{v/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} r^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = v\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

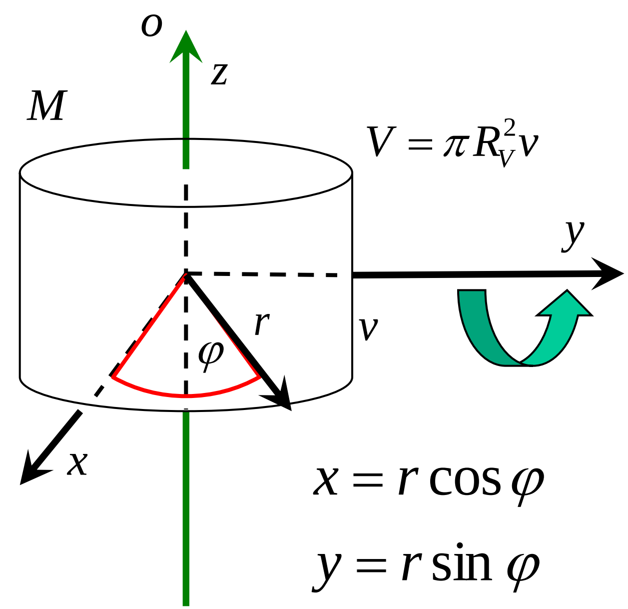
$$= 2\pi v\rho \int_0^{R_V} r^3 \mathrm{d}r = 2\pi v\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_V} = \frac{V\rho R_V^2}{2} = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$\boxed{J_z = \frac{MR_V^2}{2}}$$

Moment setrvačnosti - válce

• moment setrvačnosti homogenního válce

• pro osu otáčení procházející hmotným středem ve směru osy y nebo x:



$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$x^2 = r^2\cos^2\varphi$$

$$J_y = \rho\int_V \left(z^2 + x^2\right)\mathrm{d}V$$

$$J_y = \rho\int_{-v/2}^{v/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_V}\left(z^2 + r^2\cos^2\varphi\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \rho\int_{-v/2}^{v/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_V} z^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z + \rho\int_{-v/2}^{v/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R_V} r^3\cos^2\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

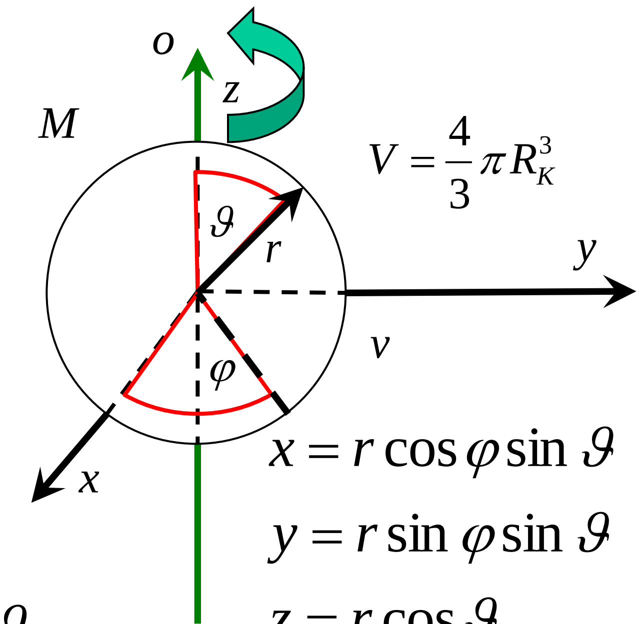
$$J_y = \rho 2\pi\frac{R_V^2}{2}\int_{-v/2}^{v/2} z^2\mathrm{d}z + \rho v\frac{R_V^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \rho\pi R_V^2\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-v/2}^{v/2} + \rho v\frac{R_V^4}{4}\pi$$

$$\boxed{J_y = J_x = \rho\pi R_V^2\frac{v^3}{12} + \rho\pi v\frac{R_V^4}{4} = M\left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4}\right)}$$

Moment setrvačnosti - koule

- moment setrvačnosti koule

- pro osu otáčení procházející hmotným středem
 ve směru osy z:



$$V = \frac{4}{3}\pi R_K^3$$

$$J_z = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin \vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \qquad x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta$$

$$y = r \sin\varphi \sin\vartheta$$

$$z = r \cos\vartheta$$

$$J_z = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\rho \int_0^{\pi}\int_0^{R_K} r^4 \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 2\pi\rho \frac{R_K^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{5}\pi\rho R_K^5 \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta \right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi\rho R_K^5 \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{4}{3}\pi\rho R_K^3 \, \frac{2}{5} R_K^2$$

$$\boxed{J_z = J_x = J_z = \frac{2}{5} M R_K^2}$$